リレーションシップ代数の構成法からみた実験計画法 (実験計画法研究会報告集)

山本, 純恭

数理解析研究所講究録
25巻 1967年 1-37

リレーションシップ代数の構成法からみた実験計画法

広島大理　山本純恭

1. 序説

1.1. リレーションシップ代数

A.T. James (1957) は実験計画法における分散分析に関連して，リレーションシップおよびリレーションシップ代数の概念を導入した。その大要についてのべることから始めよう．

代表的且つ簡単な計画である乱塊法，ラテン方格法等を念頭におきながら，これらの計画に共通な性質を抽象する．いまnを実験単位（プロット）の個数とする．これらn個のプロットの間には，その計画特有の何等かの関係（リレーションシップ）すなわち例えば二つのプロットは同じブロックに属している等の関係がある．いま一つの関係Rに着目し，任意のプロットの組(i, j)について，これらが関係Rにあるとき1，そうでないとき0とすると，関係Rは$n \times n$の対称行列

$$R = \| r_{ij} \| , \quad r_{ij} = \begin{cases} 1 ; & (i, j) \text{が関係Rにあるとき} \\ 0 ; & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

で表現される．関係Rは(i, j)について対称的でない場合を考えることは意味がないとは思わないが，現在のところ対称的なもの以外は考えられて

いない．

実験計画法におけるプロット間に導入されている関係は一般に多様であるが，どの計画にも共通する関係としては次の二つがあげられる。

(1) 恒等関係（Identity relationship）

同じプロットにあることをあらわす関係で $n \times n$ の単位行列 I であらわされる．

(2) 全般関係（Universal relationship）

プロットが互に同類であることをあらわす関係ですべての元が1である $n \times n$ の行列 G であらわされる．

(2)の代りに(1)の否定関係に相当する $G-I$ すなわち互に異るプロットであることをあらわす関係を導入してもよい．また G はすべての関係 R の否定をあらわす関係 $R^c = G - R$ を論理的に自然に導く意味において最も根源的なものと考えられる．

これら二つの関係のほか，乱塊法では，

(3) T： 同じ処理が施されている．

(4) B： 同じブロックに属する．

の二つが考えられ，ラテン方格法では

(3) T： 同じ処理が施されている．

(4) R： 同じ行にある．

(5) C： 同じ列にある．

の三つが考えられる．

n 個のプロットにおける観測値ベクトルを $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ とすると，

関係Rをあらわす行列Rは，n次元ベクトル空間におけるそれぞれ意味のある作用素とみなすことができる．すなわち

$$\underline{x} \longrightarrow R\underline{x}$$

を与えるものとみなすことができる．例えば$\underline{x}$に作用してそれぞれ

$$G\underline{x} = \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum x_i \\ \vdots \\ \sum x_i \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{n}G\underline{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{bmatrix} \qquad T\underline{x} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$$

等となる．ここにT_iはi番目のプロットに施された処理と同じ処理を施された観測値の和すなわち処理和である．

実験計画法では，プロット間に導入されている関係の全体を考え，その構造を調べることに意味がある．そのためには，すべての元が0か1である上記の根源的な関係のみならず，これらから論理的に導かれる関係をすべて含めた全体を考えねばならない．その自然な帰結として関係の全体は，根源的な関係をあらわす行列の集合の生成元とし，それ等の有限個の積として与えられる関係，さらに適当な体上（実数体，有理数体）での有限個の線形結合として与えられる関係を含むものとすることが適当である．かくて関係の全体は，加法に対しては加群，乗法に対しては準群となる．これはいわゆる行列環とよばれるものの一種であるが，James (1957)は実験計画のリレーションシップ代数と名付けた．

以上要するに，根源的な関係の集合I，G，R_1，…R_kを生成元とし，適当な体上で定義された行列環

$$\mathcal{R} = \{ I, G, R_1, \ldots, R_k \}$$

をその実験計画のリレーションシップ代数とよぶ。$\{\cdots\}$ は $\{\ \}$ 内の行列を生成元とする行列環を意味するものとする。

James(1957)はこのような観点から，乱塊法(RBD)ラテン方格法(LSD)およびつり合い不完備計画(*Balanced Incomplete Block Design*，BIBD)のリレーションシップ代数を定義した。リレーションシップ代数は，その生成元が対称行列であるから完全可約であり，両側最小イデアルの直和に順序を度外視して一意的に分解される。特にRBD，LSDの場合は，それぞれ4個，5個の一次元のイデアルの直和に分解され，BIBDの場合は3個の一次元のイデアルと2×2行列の全体の作る環に同型な4次元のイデアルの直和に分解される。この分解に対応する主巾等元(*principal idempotent*)の一意的分解すなわち

$$I = e_0 + e_1 + \cdots + e_k$$

は観測値の平方和の独立な二次形式統計量への一意的な分解

$$\underline{x}'\underline{x} = \underline{x}'e_0\underline{x} + \underline{x}'e_1\underline{x} + \cdots + \underline{x}'e_k\underline{x}$$

を与える。JamesはRBDおよびLSDの場合，これ等の平方和が伝統的な分散分析の各成分を与えることを示した。もっともBIBDの場合は，さきに述べた2×2行列の環に同型なイデアルの主巾等元が統計的意味のある平方和を与えていないことに気付き，これをさらに適当に分解することにより通常の分散分析に対応する結果を示している。この対応ずけは，リレーションシップ代数の構造分析だけでは導くことの出来ない性質のものであるから，全面的に満足すべき結果とはいえない。

1.2. アソシエーション代数

Bose-Mesner(1959)はBose-Nair(1939)がBIBDの拡張としてはじめて導入した一部つり合い不完備計画(Partially Balanced Incomplete Block Design, PBIBD)の処理の間に定義されるある種の関係をアソシエーションとよび，その関係の表現行列の生成する行列代数をアソシエーション代数とよんだ.

Boseによればv個の処理の間に，次の(a),(b),(c)の3条件を満す関係が定義されているとき，m階級のアソシエーションが定義されているという.

(a) 任意の二つの処理は互に$1, 2, \ldots, m$のいずれかのアソシエートである．各処理はそれ自身の0のアソシエートであるとする.

(b) 任意の処理αのiアソシエートである処理の個数は，特定の処理αに関係なく一定数n_iである.

(c) i番目のアソシエートにある二つの処理α, βについて，αのjアソシエートであり，同時にβのkアソシエートである処理γの個数は，特定の処理の組(α, β)に関係なく一定数p^i_{jk}である.

アソシエーションの根源的関係をあらわす行列を

$$A_i = \| a^\beta_{\alpha i} \| ; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, v, \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

$$a^\beta_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \alpha \text{と} \beta \text{が} i \text{アソシエートであるとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とすると，アソシエーションの定義から

$$A_0 = I_v, \qquad \sum_{i=1}^{m} A_i = G_v, \qquad A_j G = G A_j = n_j G$$

$$A_iA_j = A_jA_i = \sum_{k=0}^{m} p_{ij}^k A_k$$

が導かれるから，アソシエーション代数は適当な体（実数体，有理数体等）の上で線形結合の全体を考えることにより一種のリレーションシップ代数となる．これを

$$\mathfrak{A} = [A_0, A_1, \ldots, A_m]$$

とあらわす．ここに［…］は［ ］内の行列の線形結合の全体とする．

1.3. PBIBDのリレーションシップ代数

m階級のアソシエーションの定義されているv個の処理を大きさkのb個のブロックに次の3条件を満すように配置するとき，この計画を一部つり合い不完備計画（PBIBD）という．

(d) 各ブロックにはk個の相異る処理が施される．

(e) 各処理はr個のブロックに施される．

(f) i階級にある二つの処理の組はλ_i回同じブロックに施される．

小川（1959）はPBIBDのリレーションシップ代数を定義し，その構造分析を行ない，伝統的な分散分析との関係を調べた．山本・藤井（1963）は，小川の分析がいわゆるレギュラーなPBIBDの分析に限られていることに注目し，一般の場合のPBIBDの構造分析を行った．しかし，いずれの場合も JamesのBIBDの分析の場合と同様，統計的意味の明瞭な伝統的な平方和の分解に到達するためには，リレーションシップ代数の代数的構造分析に加えて，無用な母数（nuisance parameter）を消去し，有用な母数（relevant parameter）について推論するという一種の統計的な原理を付加

しなければならない不満があった．

1.4. 実験計画の構造に対する一つの見方

山本・藤井（1963）の論文をまとめながら，次にのべる考えに到達した．

(1) PBIBDのデザイン行列に関連して会合数を基礎に定義されたとみられるアソシエーションの関係は，アソシエーション代数とよばれる処理母数の構造を規定する一種のリレーションシップ代数を与えるものとみることができる．

(2) 処理母数の間に定義されるアソシエーション代数は処理母数の平方和の直交分解を一意的に指定する．この分解は実験結果の分散分析において，しばしば行なわれる処理平方和の意味のある細分割に相当するであろうと予想される．

(3) 計画を組む実験者の側からみれば，処理平方和の細分割が終局の目標であって，この目標が実験の計画に先立って幾つか存在するであろう．したがって，これらの終局の目的が達せられるように組み合せた処理を作ることが必要になる．おそらく，このような組み合せを適当な条件のもとで行なうことによって，知られている相当部分のアソシエーション代数を構成することが出来るであろう．もちろんすべてのアソシエーション代数をこのようにして組むことはできないかもしれないが，反面アソシエーション代数そのものではないが，有用なリレーションシップ代数を構成し得る可能性は否定できない．

(4) 細分割の終局の目標は，それぞれいくつかのものの間に定義された根源的関係であるIとGからなるリレーションシップ代数に対応する平方和の分解であろう．いまその個数をnとし，母数ベクトルを$\underline{\tau}'=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$とすると，リレーションシップ代数$[I,G]$の直交分解は

$$[I,G]=[G]\oplus\left[I-\frac{1}{n}G\right]$$

であるから，対応する主巾等元の分解は

$$I=\frac{1}{n}G+\left(I-\frac{1}{n}G\right)$$

であって，これに対応する$\underline{\tau}$の平方和は

$$\underline{\tau}'\underline{\tau}=\sum\tau_i^2=n\bar{\tau}^2+\sum_{i=1}^{n}(\tau_i-\bar{\tau})^2,\quad \bar{\tau}=\frac{1}{n}\sum\tau_i$$

となる．このうち第一項は通常処理の組合せの過程において他の処理と交絡されるから，平均のまわりの平方和を与える第二項が分散分析の過程において，細分割された成分の平均平方和の期待値の中に保存されることが要請される．

(5) 有用な母数の相互間の関係は上記の根源的な関係をあらわすリレーションシップ代数$[I,G]$の幾つかを適当な条件のもとで写像し組み合せて構成されるものと考えると，写像に対する適当な条件とか，組み合せ法に対する適当な条件をどのように規定したらよいであろうか．

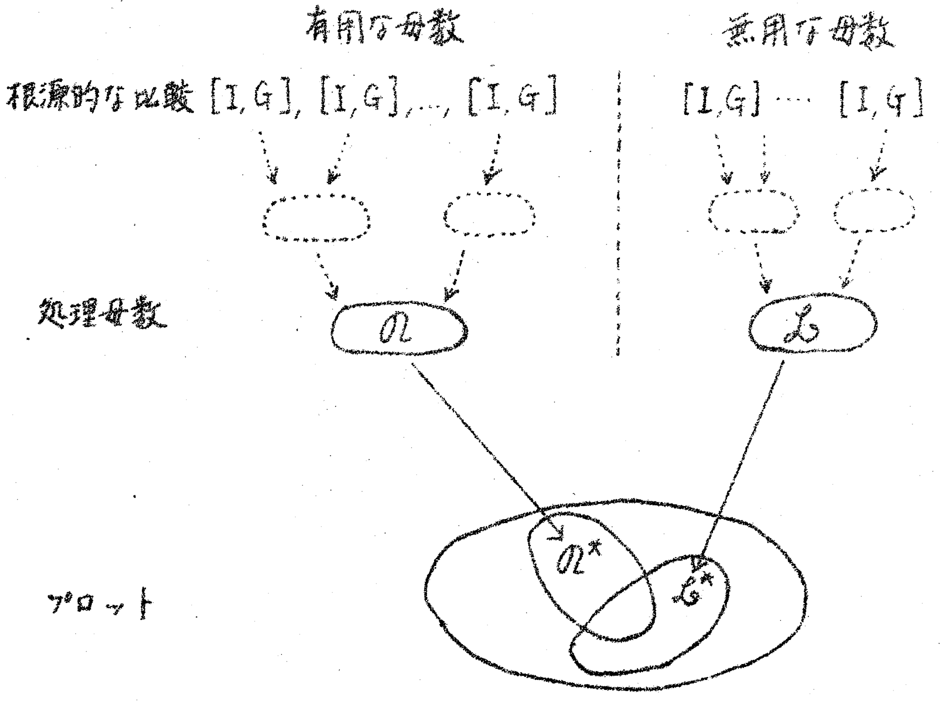
(6) 無用な母数相互間にもおそらく同様な問題があるであろう．

(7) プロット間に定義されるデザインのリレーションシップ代数は，処理のプロットへの割りつけを指定する写像によって導入された有用な母数間のリレーションシップ代数の像と，プロットがどのブロックに属するかとかどの行，どの列に属するかという無用な母数間のリレーションシッ

プ代数の像，および本来プロット間にある根源的なリレーションシップ代数[I, G]の合併として定義されるであろう。

(8) この写像，合併すなわち組合せの方法を与えるのがデザインの構成法であり，組まれた構造に基いて根源的な関係を抽出することがデザインの分析であると考えられる。

(9) 以上を図式的に書けば次のようになる。



リレーションシップ代数

2. 相似写像と部分相似写像

$\mathcal{R}$を有限個のm次の実対称行列の生成する行列環とする．$\mathcal{R}$はその生成元の性質から準単純（semi-simple，ラジカルがない）である．$\mathcal{R}$はm次元ベクトル空間V_mからV_mへの線形変換の集合である．代数の一般論から準単純環は完全可約であり，順序を度外視して有限個の最小両側イデアルの直和

$$(1) \qquad \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_k$$

に分解され，各成分イデアル$\mathcal{R}_i$は次数m_iの行列全体の単純環に同型である．この表現の重複度をα_iとする．

$\mathcal{R}$の主巾等元をE，$\mathcal{R}_i$（$i=1,\ldots,k$）の主巾等元をE_iとすると，分解(1)に対応するEの分解は一意的であり

$$(2) \qquad E = E_1 + E_2 + \cdots + E_k$$

となる．各成分の階数はそれぞれ

$$(3) \qquad r(E_i) = \beta_i = m_i\alpha_i, \quad r(E) = \sum_{i=1}^{k} r(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \leqq m$$

である．当然$E_i^2 = E_i$，$E_iE_j = 0$（$i \neq j$）がなりたつ．さらに$E_0 = I_m - E$とすると$E_0^2 = E_0$，$E_0E = EE_0 = 0$，$E_0E_i = E_iE_0 = 0$（$i=1,\ldots,k$）がなり立つ．便宜上$r(E_0) = \beta_0 = m_0\alpha_0$としておく．

Fを$n \times m$の実行列とし，任意のm次の列ベクトル$\underline{a} \in V_m$をn次の列ベクトルへ写す線形変換

$$(4) \qquad F : \underline{a} \longrightarrow \underline{a}^* = F\underline{a} \in V_n$$

を考える．この変換によって$\mathcal{R}$に導入される線形変換すなわち，任意の$A \in \mathcal{R}$に対して

(5) $\sigma:\quad A \longrightarrow A^* = FAF'$

を考え，$\mathcal{R}$の像$\mathcal{R}^* = \sigma(\mathcal{R})$を定義する．

(6) $\sigma:\quad \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^* = F\mathcal{R}F' = \sigma(\mathcal{R})$

ここに　$\mathcal{R}^* = \{A^*;\quad A^* = FAF',\ A \in \mathcal{R}\}$

定義　Fによって定義される$\mathcal{R}$の線形変換σが次の二つの条件を満すとき，σは$\mathcal{R}$の部分相似写像であるという．

(i) $\sigma(E_i)\sigma(E_j) = \delta_{ij}c_i\sigma(E_i)$ $(c_i \geq 0;\ \exists i \neq 0,\ c_i > 0;\ i,j = 0,1,\dots,k)$

(ii) $c_i > 0$のとき　$r(\sigma(E_i)) = r(E_i)$ $(i = 1,\dots,k)$

ここにδ_{ij}はクロネッカーの記号すなわち$\delta_{ii} = 1$，$\delta_{ij} = 0\ (i \neq j)$である．

特に$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = c\ (>0)$であるとき，$\sigma$は相似写像であるという．

定理1．　Fによって定義される$\mathcal{R}$の線形写像σが部分相似写像であるための必要且つ十分条件は定数c_i $(c_i \geq 0,\ \exists;\ c_i > 0,\ i = 0,\dots,\ell)$が存在して

(7) $F'F = \sum_{i=0}^{k} c_i E_i$

となることである．このとき$\mathcal{R}^* = \sigma(\mathcal{R})$は準単純な行列環となる．一般性を失うことなく$c_1 > 0,\dots,c_\ell > 0$，$c_{\ell+1} = \cdots = c_k = 0$とすると，$\mathcal{R}^*$は最小両側イデアルの直和として

$$\mathcal{R}^* = \sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R}_1) \oplus \sigma(\mathcal{R}_2) \oplus \cdots \oplus \sigma(\mathcal{R}_\ell)$$

となり，$\sigma(\mathcal{R}_i)\ (i = 1,\dots,\ell)$はそれぞれ$\mathcal{R}_i$に同型であり，表現の重複度

は相等しい，$\mathcal{R}^*$の主巾等元の分解は

$$\tilde{E} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \cdots + \tilde{E}_l$$

となる．ここに

$$(8) \qquad \tilde{E}_j = \frac{1}{c_j} F E_j F' , \quad \tilde{E} = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{c_j} F E_j F'$$

である．

証明は山本（1964）を参照されたい．

系　Fによって定義される$\mathcal{R}$の線形写像σが相似写像であるための必要且つ十分条件は定数 $c>0$，$c_0 \geq 0$ が存在して

$$(9) \qquad F'F = c_0 E_0 + cE$$

となることである．

$\mathcal{R}$がI_mを含むとき（$\mathcal{R}$は *full rank* であるという）E_0，c_0等を考える必要がなく条件(7)，(9)はそれぞれ

$$(7)' \qquad F'F = \sum_{i=1}^{k} c_i E_i$$

$$(9)' \qquad F'F = c I_m$$

となる．

3. 交絡のある相似写像

$\mathcal{R}$を前節で定義した準単純な$m \times m$の行列環とし，$\mathcal{B}$を準単純な$n \times n$の行列環とする．さらに$\mathcal{B}$はI_nを含まないとし，その主巾等元を$\tilde{E}_b$とする．Fを$n \times m$の実行列とし，線形写像

$$\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^* = F\mathcal{R}F' = \{A^* \mid A^* = FAF',\ A \in \mathcal{R}\}$$

を与えるものとする．

定義　行列Fの定義する線形写像σは

(i)　$(I_n - \tilde{E}_b)F$の定義する線形写像$\tilde{\sigma}$：

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{R}} = (I_n - \tilde{E}_b)\mathcal{R}^*(I_n - \tilde{E}_b)$$
$$= \{\tilde{A} \mid \tilde{A} = (I_n - \tilde{E}_b)FAF'(I_n - \tilde{E}_b),\ A \in \mathcal{R}\}$$

が$\mathcal{R}$の（部分）相似写像を与え，かつ

$$\tilde{E}_b \mathcal{R}^* \tilde{E}_b \neq 0$$

であるとき，$\mathcal{B}$と部分的に交絡しているという．

(ii)　(i)で定義した$\tilde{\sigma}$が$\tilde{\mathcal{R}}$の（部分）相似写像を与え，かつ

$$\tilde{E}_b \mathcal{R}^* \tilde{E}_b = 0$$

であるとき，$\mathcal{B}$と直交しているという．

(iii)　$\tilde{E}_b \mathcal{R}^* \tilde{E}_b = \mathcal{R}^*$

となるとき，$\mathcal{B}$と完全に交絡しているという．

この定義から容易にそれぞれの必要十分条件を求めることができるが，ここでは省略する（山本(1964)参照）．

実験計画法では，通常実験単位の空間に無用な母数の決定するリレー

ションシップ代数[G]が存在すると考えることは自然である．この空間に処理その他を導入（写像）して実験を行うのであるから，[G]に対する部分交絡は，通常の計画ではつねに行なわれていると考えてよかろう．このことは，実験計画の分散分析が，I_nに対する二次形式統計量 $\sum x_i^2$ の分解をとりあつかわず，$I_n-\frac{1}{n}G_n$に対する二次形式統計量 $\sum_i(x_i-\bar{x})^2$（全平方和とよばれている）の分解をとりあつかっているゆえんであると考えられる．

ブロックデザインでは，$[I_b, G_b]$の実験単位の空間への像等，無用な母数のリレーションシップ代数$\mathcal{A}$が存在するから，これに対する部分交絡は一般にさけることができない．

4. 直交構成

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ をそれぞれ $u \times u$, $v \times v$ の準単純な行列環とする. F_1, F_2 をそれぞれ $n \times u$, $n \times v$ の実行列とし, それぞれ $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ の(部分)相似写像 σ_1, σ_2 を与えるものとする. いま二つの像 $\mathcal{R}_1^* = \sigma_1(\mathcal{R}_1)$, $\mathcal{R}_2^* = \sigma_2(\mathcal{R}_2)$ が両側イデアル $\mathfrak{L}$ を共有するものとする. このとき,

定義　二つの差環(両側イデアル $\mathfrak{L}$ を法とする剰余類の作る環) $\mathfrak{A}_1^* - \mathfrak{L}$, $\mathfrak{A}_2^* - \mathfrak{L}$ が互に直交するとき, $\mathfrak{A}_1^*$ と $\mathfrak{A}_2^*$ は $\mathfrak{L}$ を法として互に直交するという. このとき $\mathcal{R} = \mathfrak{A}_1^* \cup \mathfrak{A}_2^*$ ($\mathfrak{A}_1^*$ と $\mathfrak{A}_2^*$ を含む最小の行列環) は $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ の $\mathfrak{L}$ を法とする直交構成によって作られた行列環という.

直交構成の詳細は山本(1964)定理3に譲り, ここでは特に共有するイデアル $\mathfrak{L}$ が $[G_n]$ である場合が実験計画における母数の構成において重要な役割を果すことを注意したい. 多要因の要因計画に対する母数の構成にあたっては, 複雑なイデアルを法とする直交構成を考えなければならない.

5. リレーションシップ代数の特質

James(1957)の定義したリレーションシップ代数は，準単純な行列環であることにまちがいはないが，先験的に生成元として恒等関係をあらわす単位行列 I と全般関係をあらわす行列 G を含んでいる特殊な行列環である。それのみならず，RBD, LSD, BIBD について定義されたリレーションシップ代数は，[G]を単項イデアルとしてもつ行列環であるという特質をそなえている。このことは，小川(1959)および藤井・山本(1963)のとりあつかったPBIBDのリレーションシップ代数においても同様である。

筆者は，リレーションシップ代数の生成元として先験的に恒等関係 I を含めることは制限が強すぎると考えている。また全般関係 G を含めることも必ずしも自然であるとは思っていない。従って，前節までに記した如く，相似写像，部分相似写像，交絡，直交構成等の概念の導入と性質の探究を準単純な行列環一般について展開した(山本 1964)。

しかし，少なくとも同等の対象物の集合に対してリレーションシップ代数を定義する場合，生成元の一つとして全般関係をあらわす行列 G を先験的に含めることは自然である。また個々の対象物に識別の可能性を認めるべき場合には恒等関係をあらわす I を生成元に含めるべきであろう。さらに，上記の典型的な計画では[G]を両側イデアルとするリレーションシップ代数が定義されているという事実も無視できない。

代表的な計画のリレーションシップ代数が[G]を両側イデアルとしてもつという共通の特質は，偶然的なものではなく，生成元である根源的な関係の表現行列のもつ特殊な性質に由来している。すなわち，次の定理が

なりたつことは容易にわかる。

定理　リレーションシップ代数$\mathcal{R}$が[G]を両側イデアルとしてもつための必要十分条件は，Gが$\mathcal{R}$の生成元の一つであり，かつ，すべての根源的な関係の表現行列（生成元）R（すべての元が0または1の行列）の列（行）和が列（行）に関係なく一定であることである。

このことは，ある対象物xと関係Rにある対象物の個数がxに無関係に一定であることを意味する。

標準的な計画のリレーションシップ代数はもちろん，アソシエーション代数においても[G]はそれらの単項イデアルであるという事実は，相似写像，部分相似写像，直交構成等を考える場合[G]を[G]に写す[G]-保存（部分）相似写像，[G]を法とする直交構成等が特に重要であることを示している。

6. [G]-保存(部分)相似写像および[G]-直交構成

$\mathcal{R}$を$m \times m$行列のつくるリレーションシップ代数とし，$[G_m]$をその両側イデアルとする．$n \times m$の行列Fは$\mathcal{R}$の(部分)相似写像

$$\sigma: \quad \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^* = F\mathcal{R}F'$$

を定義するものとする．このとき，$[G_m]$が$\mathcal{R}^*$の両側イデアル$[G_n]$に写像されるとき，σは[G]-保存(部分)相似写像という．

定理　Fの定義する写像σが[G]-保存(部分)相似写像であるための必要十分条件は

$$nFG_m = mG_nF \quad (\neq 0)$$

がなりたつことである．

このときイデアル$[G_m]$は$\mathcal{R}^*$のイデアル$[G_n]$に写像される．また$FG_m = 0$となることが$[G_m]$が零イデアルに写像されるための必要十分条件であることが容易にわかる(山本．1964)．

Fが[G]-保存(部分)相似写像σを与えるとき，$\mathcal{R}^* = \sigma(\mathcal{R})$を[G]-保存(部分)相似写像による像とよび，

$$\overline{\mathcal{R}} = \sigma(\mathcal{R}) \cup [I_n, G_n] = \sigma(\mathcal{R}) \cup [I_n]$$

すなわち，V_nに定義されている根源的なリレーションシップ代数$[I_n, G_n]$と像代数$\sigma(\mathcal{R})$を含む最小の行列環を[G]-保存(部分)相似写像σによって構成されたfull rankをリレーションシップ代数とよぶことにする．

つぎに$\mathcal{L}$-直交構成の特別な場合である[G]-直交構成についてのべる．

ここでは$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$はそれぞれ$I_r, I_s$を含み$[G_r], [G_s]$を両側イデアルとするリレーションシップ代数とする．F_1, F_2をそれぞれ$n \times r, n \times s$の行列とし，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$の$[G]$-保存(部分)相似写像$\sigma_1 : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_1^* = \sigma_1(\mathcal{R})$; $\sigma_2 : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_2^* = \sigma_2(\mathcal{R}_2)$を与え，かつ$[G]$-直交であるとする．このとき，$\sigma_1(\mathcal{R}_1)^{\cup}\sigma_2(\mathcal{R}_2)$は$[G]$-直交構成によって構成された行列環であるが，とくにV_nに定義されている根源的なリレーションシップ代数$[I_n, G_n]$と上記の構成された行列環を含む最小の行列環すなわち

$$\overline{\mathcal{R}} = \sigma_1(\mathcal{R}_1)^{\cup}\sigma_2(\mathcal{R}_2)^{\cup}[I_n, G_n] = \sigma_1(\mathcal{R}_1)^{\cup}\sigma_2(\mathcal{R}_2)^{\cup}[I_n]$$

を$[G]$-直交構成によって構成された full rank な リレーションシップ代数という．このとき次の定理がなりたつ．

定理　F_1, F_2の定義するσ_1, σ_2が$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$の$[G]$-直交構成を与えるための必要十分条件は

$$F_1' F_2 = c\, G_{r \times s} \quad (c > 0)$$

である．ここに$G_{r \times s}$はすべての元が1である$r \times s$行列である(山本 1964)．

m次元ベクトル$\tau' = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$があって，これら$m$個の元の間にリレーションシップ代数$\mathcal{R}$が定義されているものとする．さらに$\mathcal{R}$は$I_m$を含み$[G_m]$はその両側イデアルであるとする．$\mathcal{R}$の直和分解(最小両側イデアルの直和)を

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_k$$

とする．とくに$\mathcal{R}_0 = [G_m]$とする．この分解に対応するI_mの主巾等元の

和としての一意分解を

$$I_m = E_0 + E_1 + \cdots + E_k$$

とする．ここに $E_0 = m^{-1}G_m$ である．

I_m の一意分解は $\mathcal{R}$ による $\underline{\tau}$ の平方和の一意分解

$$\underline{\tau}' I_m \underline{\tau} = \underline{\tau}' E_0 \underline{\tau} + \underline{\tau}' E_1 \underline{\tau} + \cdots + \underline{\tau}' E_k \underline{\tau}$$

あるいは，平均のまわりの平方和の一意分解，

$$\sum_{i=1}^{m} (\tau_i - \bar{\tau})^2 = \underline{\tau}' E_1 \underline{\tau} + \cdots + \underline{\tau}' E_k \underline{\tau}$$

を与える．ここに $\bar{\tau} = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} \tau_i$．

F を $n \times m$ 行列とし，$\mathcal{R}$ の $[G]$－保存（部分）相似写像 $\sigma : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^* = F\mathcal{R}F'$ を与えるものとし，$F'F = \sum_{i=0}^{l} c_i E_i$ （$c_i > 0$　$i = 0, \ldots, l \leq k$）とする．

F による $\underline{\tau} \in V_m$ から $\underline{\tau}^* \in V_n$ への線形写像

$$F : \underline{\tau} \longrightarrow \underline{\tau}^* = F\underline{\tau}$$

を考える．このとき F による $\underline{\tau}$ の像 $\underline{\tau}^*$ と，これに直交する必ずしも $\underline{0}$ でないベクトル $\underline{\delta}$ の和

$$\underline{\mu} = F\underline{\tau} + \underline{\delta} \qquad (F'\underline{\delta} = 0)$$

を $[G]$－保存（部分）相似写像に附随して構成されたベクトルと定義する．

σ によって構成されたリレーションシップ代数 $\overline{\mathcal{R}} = \sigma(\mathcal{R})^{\cup}[I_n]$ の直和分解は

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0^* \oplus \mathcal{R}_1^* \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_l^* \oplus \mathcal{R}_e^*$$

であって，I_n の分解は

$$I_n = E_0^* + E_1^* + \cdots + E_l^* + E_e^*$$

$$= C_0^{-1}FE_0F' + C_1^{-1}FE_1F' + \cdots + C_\ell^{-1}FE_\ell F' + E_e^*$$

である．ここに $E_e^* = I_n - \sum_{i=0}^{\ell} C_i^{-1}FE_iF'$，$C_0^{-1}FE_0F' = n^{-1}G_n$．

この分解は構成されたベクトル $\underline{\mu}$ の平方和の一意分解を与える．すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 = \underline{\mu}'I_n\underline{\mu} = C_0\underline{\tau}'E_0\underline{\tau} + C_1\underline{\tau}'E_1\underline{\tau} + \cdots + C_\ell\underline{\tau}'E_\ell\underline{\tau} + \underline{\delta'\delta}$$

あるいは

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \bar{\mu})^2 = C_1\underline{\tau}'E_1\underline{\tau} + \cdots + C_\ell\underline{\tau}'E_\ell\underline{\tau} + \underline{\delta'\delta}$$

とくに，F が相似写像 σ を与えるとき

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 = \underline{\mu}'I_n\underline{\mu} = c\,(\underline{\tau}'E_0\underline{\tau} + \cdots + \underline{\tau}'E_k\underline{\tau}) + \underline{\delta'\delta}$$

あるいは

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu_i - \bar{\mu})^2 = c\,(\underline{\tau}'E_1\underline{\tau} + \cdots + \underline{\tau}'E_k\underline{\tau}) + \underline{\delta'\delta}$$

となる．

F による写像により構成されたリレーションシップ代数 $\mathcal{R}$ の直和分解に対応する附随して構成されたベクトル $\underline{\mu}$ の平方和の分解が，相似性をもって素材となったベクトル $\underline{\tau}$ の平方和のリレーションシップ代数 $\mathcal{R}$ による分解の成分に対応していることが示されている．なお，一般に $\underline{0}$ ではない残差ベクトル $\underline{\delta}$ は，$\underline{\tau}$ の像のみで表現し得ない成分を代表するもので，$\underline{\tau}$ の平方和の成分をとりまとめて群間平方和とよぶならば，$\underline{\delta'\delta}$ は群内平方和とよばれるべき成分である．とくに $\underline{\delta} = 0$ が仮定される場合は，この平方和の自由度は誤差の推定に利用される．

簡単な例をあげる．

例1. $[I_m, G_m] \to$ グループディビジブルアソシエーション代数

(山本・藤井・浜田(1965)ではN_2型)

素材となるリレーションシップ代数は

$$\mathfrak{A} = [I_m, G_m] = [m^{-1}G_m] \oplus [I_m - m^{-1}G_m]$$

であり，母数ベクトルは$\underline{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$とする．$\mathfrak{A}$は

$$\underline{\alpha}'\underline{\alpha} = m\bar{\alpha}^2 + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i - \bar{\alpha})^2, \quad \alpha = m^{-1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i$$

を与えている．

$F = I_m \otimes j_n$ $(mn \times m)$とすると，$F'F = nI_m$，$Fj_m = j_{mn}$ $F'j_{mn} = nj_m$であるから，Fは$\mathfrak{A}$の$[G]$−保存相似写像を与える。

$$\overline{\mathfrak{A}} = F\mathfrak{A}F' \cup [I_{mn}]$$

は，n個の元からなるm個の群の間に定義されるグループディビジブルアソシエーションスキーム(Bose−Conner 1952)の定義するアソシエーション代数であることが容易に検証できる(山本・藤井・浜田(1965)ではN_2型)．

Fにより構成された母数ベクトルは

$$\underline{\tau} = F\underline{\alpha} + \underline{\delta} \quad (F'\underline{\delta} = 0)$$

であって，$\mathfrak{A}$に対応する平方和分解は

$$\underline{\tau}'\underline{\tau} = mn\bar{\alpha}^2 + n\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + \sum_{j=1}^{mn}\delta_j^2$$

である．

$\underline{\delta}$の$(r-1)n+s$ $(r=1,\ldots,m;\ s=1,\ldots,n)$番目の元を$\delta_{rs}$とすると条件$F'\underline{\delta} = 0$は，すべての$r$について$\sum_{s=1}^{n}\delta_{rs} = 0$となることを示している．従って$\underline{\tau}$は$N_2$型(Two-way nested)計画の母数構造をもっている．このことはN_2−型計画の母数構造そのものが$[I_m, G_m]$から，$[G]$−保存

相似写像によって構成されることを意味している．グループディビジブルアソシェーションの母数構造に対して一つの光を当てたことになる．

二つのベクトル $\underline{\alpha}'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, $\underline{\beta}'=(\beta_1,\ldots,\beta_t)$ があって，それぞれの元の間にリレーションシップ代数 $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ が定義されているとする．$\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ はそれぞれ I_s, I_t を含み且つ両側イデアルとして $[G_s]$, $[G_t]$ をもつものとする．

$\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ の直和分解をそれぞれ

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{10} \oplus \mathcal{R}_{11} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_{1k}, \quad \mathcal{R}_{10} = [G_s]$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_{20} \oplus \mathcal{R}_{21} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_{2l}, \quad \mathcal{R}_{20} = [G_t]$$

とし，対応する I_s, I_t の分解をそれぞれ

$$I_s = E_{10} + E_{11} + \cdots + E_{1k} \qquad E_{10} = s^{-1}G_s$$

$$I_t = E_{20} + E_{21} + \cdots + E_{2l} \qquad E_{20} = t^{-1}G_t$$

とする．$\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ の平方和分解は

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^2 = \underline{\alpha}'I_s\underline{\alpha} = \underline{\alpha}'E_{10}\underline{\alpha} + \underline{\alpha}'E_{11}\underline{\alpha} + \cdots + \underline{\alpha}'E_{1k}\underline{\alpha}$$

$$\sum_{j=1}^{t}\beta_j^2 = \underline{\beta}'I_t\underline{\beta} = \underline{\beta}'E_{20}\underline{\beta} + \underline{\beta}'E_{21}\underline{\beta} + \cdots + \underline{\beta}'E_{2l}\underline{\beta}$$

あるいは

$$\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i-\bar{\alpha})^2 = \underline{\alpha}'E_{11}\underline{\alpha} + \cdots + \underline{\alpha}'E_{1k}\underline{\alpha}$$

$$\sum_{j=1}^{t}(\beta_i-\bar{\beta})^2 = \underline{\beta}'E_{21}\underline{\beta} + \cdots + \underline{\beta}'E_{2l}\underline{\beta}$$

である．

$F_1(v\times s)$, $F_2(v\times t)$ をそれぞれ $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ の[G]-保存相似写像 σ_1, σ_2 を与え，互に[G]-直交であるとする．一般性を失うことなく

$$F_1'F_1 = \sum_{i=0}^{p} c_{1i}E_{1i} \quad (c_{1i}>0,\ i=0,1,\ldots,p\leq k)$$

$$F_2'F_2 = \sum_{j=1}^{q} C_{2j} E_{2j} \quad (C_{2j} > 0,\ j = 0, 1, \ldots, q \leq \ell)$$

$$F_1'F_2 = c\, G_{s \times t} \quad (c > 0)$$

を満足するものとすることができる．[G]-直交構成によって構成されたリレーションシップ代数は

$$\overline{\mathcal{R}} = F_1 \mathcal{R}_1 F_1' \cup F_2 \mathcal{R}_2 F_2' \cup [I_v]$$

である．

$\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ の F_1, F_2 による像をそれぞれ $\underline{\alpha}^* = F_1\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}^* = F_2\underline{\beta}$ とし，これらの和と，$\underline{\alpha}^*$, $\underline{\beta}^*$ の作る部分空間に直交する必ずしも $\underline{0}$ でないベクトル $\underline{\delta}$ の和としてあらわされるベクトル

$$\underline{\mu} = F_1\underline{\alpha} + F_2\underline{\beta} + \underline{\delta} \quad (F_1'\underline{\delta} = 0,\ F_2'\underline{\delta} = 0)$$

を[G]-直交構成に附随して構成されたベクトルと定義する．

$\overline{\mathcal{R}}$ の直和分解は[G]-直交構成であるから

$$\overline{\mathcal{R}} = [G_v] \oplus \sigma_1(\mathcal{R}_{11}) \oplus \sigma_1(\mathcal{R}_{12}) \oplus \cdots \oplus \sigma_1(\mathcal{R}_{1p})$$
$$\oplus\ \sigma_2(\mathcal{R}_{21}) \oplus \sigma_2(\mathcal{R}_{22}) \oplus \cdots \oplus \sigma_2(\mathcal{R}_{2q})$$

であって，I_v の対応する分解は

$$I_v = v^{-1}G_v + \tilde{E}_{11} + \tilde{E}_{12} + \cdots + \tilde{E}_{1p}$$
$$+ \tilde{E}_{21} + \tilde{E}_{22} + \cdots + \tilde{E}_{2q} + \tilde{E}_e$$

である．ただし，

$$\tilde{E}_{1i} = c_{1i}^{-1} F_1 E_{1i} F_1', \quad \tilde{E}_{2j} = c_{2j}^{-1} F_2 E_{2j} F_2'.$$

$\underline{\mu}$ の平方和の一意分解は

$$\sum_{i=1}^{v} \mu_i^2 = \underline{\mu}' I_v \underline{\mu} = v^{-1}\underline{\mu}' G_v \underline{\mu} + \underline{\mu}'\tilde{E}_{11}\underline{\mu} + \cdots + \underline{\mu}'\tilde{E}_{1p}\underline{\mu}$$
$$+ \underline{\mu}'\tilde{E}_{21}\underline{\mu} + \cdots + \underline{\mu}'\tilde{E}_{2q}\underline{\mu} + \underline{\mu}'\tilde{E}_e\underline{\mu}$$

であるが，これは簡単な計算の結果

$$\sum_{i=1}^{v}\mu_i^2 = v^{-1}\underline{\mu}'G_v\underline{\mu} + c_{11}\underline{\alpha}'E_{11}\underline{\alpha} + \cdots + c_{1p}\underline{\alpha}'E_{1p}\underline{\alpha}$$
$$+ c_{21}\underline{\beta}'E_{21}\underline{\beta} + \cdots + c_{2q}\underline{\beta}'E_{2q}\underline{\beta} + \underline{\delta}'\underline{\delta}$$

となる．$\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ に対する成分が交絡されているが，平均のまわりの平方和の成分がそれぞれ相似の形で保存されていることがわかる（ある成分は0に写像されていることがある）．また $\underline{\delta}'\underline{\delta}$ は $\underline{\delta}'\widehat{E}_e\underline{\delta}$ であり，$\underline{\delta} \neq 0$ の場合は広い意味の交互作用に相当し，$\underline{\delta} = 0$ の場合はこの自由度は誤差の推定に利用される．

簡単な例をあげよう．

例2．$[I_s, G_s]$, $[I_t, G_t] \longrightarrow$ 二要因配置アソシエーション代数

（山本・藤井・浜田（1965）では F_2 型）．

二つのベクトルを $\underline{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\underline{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ とし，これらの元の間にそれぞれ定義された[G]-直交構成の素材となるリレーションシップ代数を

$$\mathcal{R}_1 = [I_s, G_s] = [s^{-1}G_s] \oplus [I_s - s^{-1}G_s]$$
$$\mathcal{R}_2 = [I_t, G_t] = [t^{-1}G_t] \oplus [I_t - t^{-1}G_t]$$

とする．これらは $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ の平方和分解

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i^2 = \underline{\alpha}'I_s\underline{\alpha} = s\overline{\alpha}^2 + \sum_{i=1}^{s}(\alpha_i - \overline{\alpha})^2$$
$$\sum_{j=1}^{t}\beta_j^2 = \underline{\beta}'I_t\underline{\beta} = t\overline{\beta}^2 + \sum_{j=1}^{t}(\beta_j - \overline{\beta})^2$$

を指定している．

$F_1(st \times s)$, $F_2(st \times t)$ をそれぞれ $F_1 = I_s \otimes j_t$, $F_2 = j_s \otimes I_t$

とすると，F_1, F_2 はそれぞれ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ の[G]-保存相似写像 $\sigma_1(\mathcal{R}_1) = F_1 \mathcal{R}_1 F_1'$，$\sigma_2(\mathcal{R}_2) = F_2 \mathcal{R}_2 F_2'$ を定義し，かつ[G]-直交であることが容易に検証できる．[G]-直交構成によって構成されたリレーションシップ代数

$$\overline{\mathcal{R}} = \sigma_1(\mathcal{R}_1) \cup \sigma_2(\mathcal{R}_2) \cup [I_{st}]$$

は，$I_s \otimes I_t$，$(G_s - I_s) \otimes I_t$，$I_s \otimes (G_t - I_t)$，$(G_s - I_s) \otimes (G_t - I_t)$ を生成元とし，これらの線形結合で生成される行列環であることが容易に検証される．これはいわゆる二要因配置アソシエーション代数である．

$\overline{\mathcal{R}}$ の直和分解は

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}} &= \sigma_1(\mathcal{R}_1) \cup \sigma_2(\mathcal{R}_2) \cup [I_{st}] \\ &= F_1 [G_s] F_1' \oplus F_1 [I_s - s^{-1} G_s] F_1' \\ &\qquad \oplus F_2 [I_t - t^{-1} G_t] F_2' \oplus \tilde{\mathcal{R}}_e\end{aligned}$$

となり，対応する I_{st} の分解は

$$\begin{aligned} I_{st} = (st)^{-1} G_s \otimes G_t &+ (I_s - s^{-1} G_s) \otimes t^{-1} G_t + s^{-1} G_s \otimes (I_t - t^{-1} G_t) \\ &+ (I_s - s^{-1} G_s) \otimes (I_t - t^{-1} G_t)\end{aligned}$$

である．

[G]-直交構成に附随して構成されたベクトルは

$$\underline{\tau} = F_1 \underline{\alpha} + F_2 \underline{\beta} + \underline{\delta} \quad (F_1' \underline{\delta} = 0,\ F_2' \underline{\delta} = 0)$$

であるが，これの $\overline{\mathcal{R}}$ によって推定される平方和分解は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{st} \tau_k^2 = st(\bar{\alpha} + \bar{\beta})^2 + t \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + s \sum_{j=1}^{t} (\beta_j - \bar{\beta})^2 \\ + \underline{\delta}' \underline{\delta}\end{aligned}$$

あるいは

$$\sum_{k=1}^{st} (\tau_k - \bar{\tau})^2 = t \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + s \sum_{j=1}^{t} (\beta_j - \bar{\beta})^2 + \underline{\delta}' \underline{\delta}$$

である．

いま $\underline{\delta}$ の $(i-1)t+j$ $(i=1,\dots,s,\ j=1,\dots,t)$ 番目の元を伝統的な記号に従い δ_{ij} とかくことにすると，$\underline{\delta}$ に対する条件は

$$F_1'\underline{\delta}=0 \iff \forall i, \sum_j \delta_{ij}=0$$

$$F_2'\underline{\delta}=0 \iff \forall j, \sum_i \delta_{ij}=0$$

となるから，二要因配置計画における母数構造の交互作用をあらわす母数に相当する．$\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ は当然主効果をあらわす母数ベクトルに対応する．二つの根源的なリレーションシップ代数の直交構成として二要因配置計画の母数構造を捉え，残差項として交互作用項が出現することを示したことになる．もちろん $\underline{\delta}=0$ ならば，この項に対応する平方和の自由度は誤差の推定に利用される．いま一つ注目すべきことは，主効果の不定性がリレーションシップ代数の構造から自然に除去され，平均に相当する部分が交絡されて一つの平方和成分にまとまっていることである．

[G]-保存(部分)相似写像，[G]-直交構成あるいはより一般な $\mathcal{S}$-直交構成による種々のアソシェーション代数の構成および附随する母数構造の自然な構成およびこれらの構造の応用については，山本・藤井・浜田の報告および1965の論文を参照されたい．

なお，ここで一般の場合はいわゆるJamesの意味のリレーションシップ代数でなく，従ってアソシェーション代数でもないが，$[I_2, G_2]$ から出発して[G]-保存部分相似写像によって構成されるリレーションシップ代数

の一例として等間隔の場合の直交多項式分解を与えるリレーションシップ代数の系列

$$[I_2, G_2] \equiv \mathfrak{A}_1 \xrightarrow{\sigma_1} \mathfrak{A}_2 \xrightarrow{\sigma_2} \cdots \quad \mathfrak{A}_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \mathfrak{A}_n \longrightarrow \cdots$$

を示しておこう．ここに σ_{n-1} は

$$F_{n-1} = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & & & \\ 1 & n-1 & & & & \\ & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 2 & & \\ & & & n-1 & 1 & \\ & & & & & n \end{bmatrix}$$

によって定義される部分相似写像であって

$$\mathfrak{A}_n = F\mathfrak{A}_{n-1}F' \cup [I_{n+1}]$$

であることが，若干の計算の結果証明される．しかも $\mathfrak{A}_n$ の直和分解の成分はすべて自由度 1 であって $n+1$ 段階の等間隔測定値に対する直交多項式分解を与える平方和を与える．段階数の増加とともに新しく高次の多項式に対応する成分が附加されることも興味ある事実である（この結果は山本・浜田（1964年秋日本数学会）の報告したものであるが，論文としては未発表である）．

7. 実験計画のリレーションシップ代数と分散分析

多くの実験計画は，計画された実験を通じて処理と名付けられる母数ベクトル $\underline{\tau}'=(\tau_1,\ldots,\tau_v)$ に関する推論を行なうことを目的としている．筆者は，$\underline{\tau}$ そのものが直接の推論の対象であることはむしろ稀であって，それ自体何等かの構造をもち，その構造が直接の推論の対象となるものと考えている．すなわち，多くの場合 $\underline{\tau}$ の元の間にはある種のリレーションシップ代数 $\mathfrak{A}$ によって特徴付けられる構造が構成されていて，推論の対象はその構成の素材となった根源的なリレーションシップ代数の定義されている対象をあらわす母数および，構成の過程において導入される母数にあるという考えである．例えば二要因配置計画の母数構造の場合は母数ベクトル $\underline{\tau}$ そのものではなく，$\underline{\tau}$ を構成する行主効果 $\underline{\alpha}$，列主効果 $\underline{\beta}$，および交互作用項 $\underline{\delta}$ が本来の推論の対象である（$\underline{\delta}=0$ が仮定されることもある）．

このように $\mathfrak{A}$ によって表現される構造をもった母数に関する推論を行なうためには，通常 n 個の実験単位に処理をわりつけ実験観察が行なわれる．このわりつけは V_v から V_n への線形写像を与える $n\times v$ 行列 Φ によって規定される．

n 個の実験単位そのものの影響が等質且つ互に独立なランダム効果である場合，実験結果をあらわす観測値ベクトル $\underline{x}'=(x_1,\ldots,x_n)$ は

$$\underline{x} = \Phi\underline{\tau} + \underline{e}$$

とあらわされる．

このとき $\underline{x}$ の各元の間には $\mathfrak{A}$ の Φ によって導入されるリレーション

シップ代数 $\mathcal{O}\mathcal{L}^{*}=\Phi\mathcal{O}\mathcal{L}\Phi'$ に加えて，等質且つ独立な n 個の $\underline{e}$ の元の間に存在するリレーションシップ代数 $[I_n, G_n]$ が存在する．従って，これらの合併すなわち

$$\mathcal{R}=\Phi\mathcal{O}\mathcal{L}\Phi' \cup [I_n, G_n]$$

をこの実験のリレーションシップ代数と定義する．

n 個の実験単位は等質ではあるが，その効果の平均が一様でない場合がある．例えば，RBDあるいはBIBDの場合のように，幾つかのブロックに分割されている場合，LSD，二方向消去計画の場合のように，同じ行に属するとか同じ列に属するとかの関係で規定される場合がこれである．このことは，一般にブロック母数とよばれる無用な母数ベクトル $\underline{\beta}'=(\beta_1, \ldots, \beta_b)$ に対してある種のリレーションシップ代数 $\mathcal{L}$ が構成されていて，実験単位の空間へのわりつけをあらわす写像 $\Psi(n\times b)$ によって実験単位の空間へ導入されているとみなすことができる．すなわち $\mathcal{L}^{*}=\Psi\mathcal{L}\Psi'$ が無用且つ推論の過程において消去さるべき母数のリレーションシップ代数の像である．

この場合は，観測値ベクトル $\underline{x}$ は

$$\underline{x}=\Phi\underline{\tau}+\Psi\underline{\beta}+\underline{e}$$

とあらわされる．$\underline{e}$ は等平均，等分散且つ互に独立なランダム効果のベクトルであるから，この種の実験のリレーションシップ代数は

$$\mathcal{R}=\Phi\mathcal{O}\mathcal{L}\Phi' \cup \Psi\mathcal{L}\Psi' \cup [I_n, G_n]$$

と定義される．この種のリレーションシップ代数をもつ計画の代表的な例は，RBD，BIBD，PBIBD，LSD等である．

これまでの記述は概括的なものであるが，標準的な計画はさらに幾つかの仮定を満すものである．すなわち

(i) $\mathfrak{O}$はI_vを含み，$[G_v]$を両側イデアルとする．

(ii) $\mathfrak{B}$は$[G_b]$を両側イデアルとする．

(iii) $\Phi(n\times b)$は$\mathfrak{B}$の$[G]$-保存部分相似写像

$$\sigma_b : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}^* = \Phi\mathfrak{B}\Phi'$$

を与える．$\mathfrak{B}^*$はI_nを含まない．

(iv) $\Psi(n\times v)$は$\mathfrak{O}$の$\mathfrak{B}^*$に対する部分交絡写像を与える．すなわち

$$\mathfrak{O} \ni \Psi'(I_n - \tilde{E}_b)\Psi \neq 0$$
$$\tilde{E}_b\Psi \neq 0$$

ここに$\tilde{E}_b$は$\mathfrak{B}^*$の主巾等元である．

(v) $\underline{e}$の各元は等平均，等分散且つ互に独立な正規分布に従う．

例えばRBDは，上記の諸性質をみたす計画であるが，通常交絡がある計画といわれていない．この場合は交絡される部分がイデアル$[G_n]$に限られているから，$[G_n]$を法とする直和分解に相当する分散分析すなわち平均のまわりの平方和$\sum_i (x_i - \bar{x})^2$の分析を考えるかぎり交絡があるとはいわない．しかし，処理平均に相当する母数がブロック平均に相当する母数に交絡されて，分析の過程では一般平均といわれる成分として抽出されるから，ここでは交絡のある場合に含めていることを注意したい．なお$\mathfrak{B} = [G_b]$の場合すなわち$\mathfrak{B}^* = [G_n]$の場合が無用な母数を考えない場合に相当することを重ねて注意したい．

観測値ベクトル$\underline{x}$は

$$\underline{x} = \Phi\underline{\tau} + \Psi\underline{\beta} + \underline{e}$$

であり，リレーションシップ代数$\mathcal{R}$は

$$\mathcal{R} = \Phi\mathcal{A}\Phi' \cup \Psi\mathcal{B}\Psi' \cup [I_n, G_n]$$

によって定義される計画で条件(i)−(V)を満す場合の分散分析について調べよう.

具体性をもたせるために$\mathcal{A}$の直和分解を

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_k, \quad \mathcal{A}_0 = [G_v]$$

とし，対応するI_vの分解を

$$I_v = E_0 + E_1 + \cdots + E_k, \quad E_0 = v^{-1}G_v$$

とする．$\underline{\tau}$の平方和分解は

$$\underline{\tau}'\underline{\tau} = \underline{\tau}'E_0\underline{\tau} + \underline{\tau}'E_1\underline{\tau} + \cdots + \underline{\tau}'E_k\underline{\tau}$$

あるいは

$$\sum_i (\tau_i - \bar{\tau})^2 = \underline{\tau}'E_1\underline{\tau} + \cdots + \underline{\tau}'E_k\underline{\tau}$$
$$= (E_1\underline{\tau}, E_1\underline{\tau}) + \cdots + (E_k\underline{\tau}, E_k\underline{\tau})$$

である．ここに$(\underline{a}, \underline{a})$はベクトル$\underline{a}$の内積をあらわす．なお，これら平方和の成分のうち幾つかは仮定によって（例えば交互作用項が0である等）0とされることがある．

Φの与える部分交絡写像については，一般性を失うことなく

$$\Phi'(I_n - \tilde{E}_b)\Phi = \sum_{i=1}^{s} c_i E_i \quad (c_i > 0, \ i = 1, \ldots, s \leq k)$$

とする．

$\underline{\tau}$に関する推論を$\underline{\beta}$を消去した条件のもとで行なうことは，リレーションシップ代数$\mathcal{R}$に対して

$$\tilde{\mathcal{R}} = (I_n - \tilde{E}_b)\mathcal{R}(I_n - \tilde{E}_b)$$

を考えよということである。

$$\tilde{\mathcal{R}} = (I_n - \tilde{E}_b)\Phi\mathfrak{N}\Phi'(I_n - \tilde{E}_b) \cup [I_n - \tilde{E}_b]$$

であって，$F = (I_n - \tilde{E}_b)\Phi$ を考えると，条件(iv)から F は $\mathfrak{N}$ の部分相似写像 $\tilde{\sigma}: \mathfrak{N} \to \tilde{\mathfrak{N}} = F\mathfrak{N}F'$ を与え，$\mathcal{L}^* \ni G_n$ より $\mathfrak{N}$ のイデアル $\mathfrak{N}_0$ は 0 に写像される．$\tilde{\mathfrak{N}}$ の直和分解は

$$\tilde{\mathfrak{N}} = F\mathfrak{N}_1F' \oplus F\mathfrak{N}_2F' \oplus \cdots \oplus F\mathfrak{N}_sF'$$

であり，対応する $\tilde{\mathfrak{N}}$ の主巾等元 $\tilde{E}$ の分解は

$$\tilde{E} = c_1^{-1}FE_1F' + \cdots + c_s^{-1}FE_sF'$$

であるから，$\tilde{\mathcal{R}}$ の直和分解は

$$\tilde{\mathcal{R}} = F\mathfrak{N}_1F' \oplus F\mathfrak{N}_2F' \oplus \cdots \oplus F\mathfrak{N}_sF' \oplus [\tilde{E}_e]$$

となる．ここに $\tilde{E}_e = I_n - \tilde{E}_b - \tilde{E}$ である．従って $\tilde{\mathcal{R}}$ の主巾等元 $I_n - \tilde{E}_b$ の $\tilde{\mathcal{R}}$ による分解は

$$I_n - \tilde{E}_b = c_1^{-1}FE_1F' + c_2^{-1}FE_2F' + \cdots + c_s^{-1}FE_sF' + \tilde{E}_e$$

である．

この分解に対応する平方和の分解は

$$\underline{x}'(I_n - \tilde{E}_b)\underline{x} = c_1^{-1}\underline{x}'FE_1F'\underline{x} + c_2^{-1}\underline{x}'FE_2F'\underline{x} + \cdots$$
$$\cdots + c_s^{-1}\underline{x}'FE_sF'\underline{x} + \underline{x}'\tilde{E}_e\underline{x}$$

となる．

平方和分解の右辺の各成分は互に独立であり，それぞれ非心カイ自乗分布に従うことは容易にわかる（例えば *Graybill - Marsaglia* 1957）．各成分の非心率および自由度は分散分析表に示す通りである．ただし θ^2 は

$\underline{e}$の各成分の分散とする．

分散分析表

変動要因		平方和	自由度	非心率
処理平方和の成分	1	$\underline{x}'FE_1F'\underline{x}$	$r(E_1)$	$c_1\underline{\tau}'E_1\underline{\tau}/2\theta^2$
	2	$\underline{x}'FE_2F'\underline{x}$	$r(E_2)$	$c_2\underline{\tau}'E_2\underline{\tau}/2\theta^2$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	s	$\underline{x}'FE_sF'\underline{x}$	$r(E_s)$	$c_s\underline{\tau}'E_s\underline{\tau}/2\theta^2$
誤差		$\underline{x}'\tilde{E}_e\underline{x}$	$n-r(\tilde{E}_b)-\sum r(E_i)$	0
小計		$\underline{x}'(I_n-\hat{E}_b)\underline{x}$	$n-r(\tilde{E}_b)$	
ブロック成分（$\underline{\tau}$を消去しない）		$\underline{x}'\tilde{E}_b\underline{x}$	$r(\tilde{E}_b)$	$\underline{\tau}'\Phi\tilde{E}_b\Phi\underline{\tau}+2\underline{\tau}'\Phi\tilde{E}_b\Phi\underline{\beta}$ $+\underline{\beta}'\Phi'\tilde{E}_b\Phi\underline{\beta}$
計		$\underline{x}'\underline{x}$	n	

（注意　ブロック成分がないときは，小計の平方和が$\sum(x_i-\bar{x})^2$となり通常の分散分析表は終了する．またブロック成分の非心率の計算では一般性を失うことなく$E(\underline{e})=0$とした．）

Φに対する条件(iv)がこの種の計画では本質的であることを注意したい．この条件はいわゆる *Adjusted normal equation* の係数行列が処理母数のリレーションシップ代数$\mathfrak{A}$に含まれていることを示している．

BIBD, PBIBDでは，$\mathfrak{A}$はアソシエーション代数，$\hat{E}_b=\frac{1}{k}\Phi\Phi'$（$k$はブロックの大きさ），$\Phi'\Phi=rI_v$（$r$は反復数）であり，デザイン行列は$N=\Phi'\Phi$であるから，条件(iv)は

$$\Phi'(I_n-\tilde{E}_b)\Phi = rI_v - \frac{1}{k}NN' \in \mathfrak{N}$$

となり $NN'\in\mathfrak{N}$ すなわち NN' がアソシェーション行列の線形結合であらわされるという条件と同等である.

いわゆるBIBDでは $NN'\in[I_v, G_v]$ であるから, 処理母数に定義されるリレーションシップ代数は $[I_v, G_v]$ を部分環とし $[G_v]$ をイデアルとする準単純な行列環であればつねに条件(iv)を満すことになる. PBIBDの場合は処理母数に定義されるリレーションシップ代数がPBIBDの定義するアソシェーション代数を含むことが条件(iv)を満すために必要である. この意味で不完備計画ではBIBDが分析にあたって最も融通性のあるよい計画であるといえる.

V. R. Rao (1958) のRBD, 石井・小川 (1965) のPBBD等の計画, 楠本 (1964) の二方向消去計画等は上記計画のわく内にあることを注意 (した)い.

参考文献

[1] Albert, A. A. (1939). Structure of algebras.
Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 24, New York.

[2] Bose, R. C. and Mesner, D. M. (1959). On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs.
Ann. Math. Statist. 30 21-38.

[3] Bose, R. C. and Nair, K. R. (1939). Partially balanced incomplete block designs. Sankhya 4 337-372.

[4] Graybill, F. A. and Marsaglia, G. (1957). Idempotent matrices and quadratic forms in the general linear hypothesis. Ann. Math. Statist. 28 678-686.

[5] Ishii, G. and Ogawa, J. (1965). On the analysis of balanced and partially balanced block designs.
Osaka City Univ. Business Rev. No.81.

[6] James, A. T. (1957). The relationship algebra of an experimental design. Ann. Math. Statist. 28 993-1002.

[7] Kusumoto, K. (1964). On a design for two-way elimination of heterogeneity and its analysis.

J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 28 237-258.

[8] Mann, H. B. (1960). The algebra of a linear hypothesis.

Ann. Math. Statist. 31 1-15.

[9] Ogawa, J. (1959). The theory of the association algebra and the relationship algebra of a partially balanced incomplete block designs.

Inst. Statist. mimeo. series 224, Chapel Hill, N. C.

[10] van der Waerden, B. L. (1959). Algebra II, (4th ed.) Springer, Berlin.

[11] Yamamoto, S. (1964). Some aspects for the composition of relationship algebras of experimental designs.

J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 28 167-197.

[12] Yamamoto, S. and Fujii, Y. (1963). Analysis of partially balanced incomplete block designs.

J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 27 119-135.

[13] Yamamoto, S., Fujii, Y. and Hamada, N. (1965).

Composition of some series of association algebras.

J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 29 181-215.